*

NO.

Date 17/04/2018

ΘΕΩΡΗΜΑ (Peano): Υποθέτουμε ότι $F(t,x)$ είναι συνεχής συνάρτηση σε ένα σύνολο της μορφής:

$K_{a,b}(t_0,x_0) = \{(t,x): |t-t_0|\le a,\ |x-x_0|\le b\}$ τότε το Π.Α.Τ: $u'(t)=F(t,u(t))$, $u(t_0)=x_0$ έχει μία τουλάχιστον λύση ορισμένη για κάθε t με $|t-t_0|\le \tau$ όπου $\tau = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ και $M = \sup\limits_{(t,x)\in K_{a,b}(t_0,x_0)} |F(t,x)|$

ΕΚΤΟΣ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ασχολούμαστε πρώτα με το διάστημα $[t_0, t_0+\tau]$ ορίζουμε την ακολουθία $u(t)=x_0$, $t\in[t_0,t_0+\tau]$ και για $n\ge 1$:

$$u_n(t) = \begin{cases} x_0, & t_0\le t\le t_0+\frac{\tau}{n} \\ x_0+\displaystyle\int_{t_0}^{t-\tau/n} F(s,u(s))\,ds, & t_0+\frac{k\tau}{n}\le t\le t_0+\frac{(k+1)\tau}{n} \end{cases}$$

όπου $k\in\{1,\dots,n-1\}$

....

Συνεχίζοντας για $n>3$ έχουμε ότι:

$$u_n(t) = \begin{cases} x_0, & t_0\le t\le t_0+\frac{\tau}{n} \\ x_0+\displaystyle\int_{t_0}^{t-\tau/n} F(s,u(s))\,ds, & t_0+\frac{\tau}{n}\le t\le t_0+\frac{2\tau}{n} \\ x_0+\displaystyle\int_{t_0}^{t-\tau/n} F(s,u(s))\,ds, & t_0+\frac{2\tau}{n}\le t\le t_0+\frac{3\tau}{n} \\ \vdots & \\ x_0+\displaystyle\int_{t_0}^{t-\tau/n} F(s,u(s))\,ds, & t_0+\frac{(n-1)}{n}\tau\le t\le t_0+\tau. \end{cases}$$

Άρα η ακολουθία u_n ορίζεται σε ολόκληρο το $[t_0,t_0+\tau]$ και επαγωγικά θ.δ.ο:

$|u_n(t)-x_0|\le b$ για κάθε $t\in[t_0,t_0+\tau]$ (*)

Φανερά αν $t\in[t_0,t_0+\tau/n]$ τότε:

$|u_n(t) - x_0| = |x_0 - x_0| = 0 \le b$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για

$t \in \left[t_0, t_0 + \frac{k\tau}{n}\right]$ για κάποιο $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Δηλαδή:

$$|u_n(t) - x_0| \le b \quad \forall t \in [t_0, t_0 + k\tau/n].$$

τότε θ.δ.ο η (*) ισχύει και για $t \in \left[t_0 + \frac{k\tau}{n}, t_0 + \frac{(k+1)\tau}{n}\right]$

Πράγματι, έστω

$$t_0 + \frac{k\tau}{n} \le t \le t_0 + \frac{(k+1)\tau}{n}$$

οπότε $t_0 + \frac{(k-1)\tau}{n} \le t - \frac{\tau}{n} \le t_0 + \frac{k\tau}{n}$ (Δ)

άρα έχουμε: για $s \in \left[t_0 + \frac{(k-1)\tau}{n}, t_0 + \frac{k\tau}{n}\right]$

$$|u_n(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t-\tau/n} F(s, u_n(s))\,ds \right| \le \int_{t_0}^{t-\tau/n} |F(s, u_n(s))|\,ds \le M\left(t - \frac{\tau}{n} - t_0\right) \overset{(Δ)}{\le}$$

$$\le M\left(t_0 + \frac{k\tau}{n} - t_0\right) \underset{\tau \le \frac{b}{M}}{\le} \frac{k}{n} \cdot \frac{b}{M} \cdot M = \frac{k}{n} \cdot b \le b$$

Άρα, $(t, u_n(t)) \in K_{a,b}(t_0, x_0) \ \forall t \in [t_0, t_0 + \tau]$

Επιπλέον, έχουμε ότι η ακολουθία (u_n) είναι φραγμένη στο $[t_0, t_0+\tau]$ αφού

$|u_n(t)| = |u_n(t) - x_0 + x_0| \le |u_n(t) - x_0| + |x_0| \le b + |x_0|$

Δηλαδή, αφού η ακολουθία δίνεται από τον τύπο:

$$u_n(t) = \begin{cases} x_0, & t \in [t_0, t_0 + \tau/n] \\ x_0 + \int_{t_0}^{t-\tau/n} F(s, u_n(s))\,ds, & t \in \left[t_0 + \frac{\tau}{n}, t_0 + \tau\right] \end{cases}$$

Έστω $t_1, t_2 \in [t_0, t_0+\tau]$ τότε:

NO.

Date ΜΓΣΑ

<u>1η Περίπτωση:</u> Έστω $t_1, t_2 \in [t_0, t_0+\tau/n]$ τότε:

$$|u_n(t_1) - u_n(t_2)| = |x_0 - x_0| = 0 \le |t_1 - t_2|$$

<u>2η Περίπτωση:</u> έστω $t_1, t_2 \in \left[t_0, t_0 + \frac{\tau}{n}\right]$ και $t_2 \in \left[t_0 + \frac{\tau}{n}, t_0+\tau\right]$

τότε:

$$|u_n(t_1) - u_n(t_2)| = \left|x_0 - x_0 - \int_{t_0}^{t_0-\tau/n} F(s, u_n(s))\, ds\right| = \left|\int_{t_0}^{t_2-\tau/n} F(s, u_n(s))\, ds\right|$$

$$\le M \cdot \left(t_2 - \frac{\tau}{n} - t_0\right) = M\left(t_2 - \left(t_0 + \frac{\tau}{n}\right)\right) \underset{t_1 < t_0 + \frac{\tau}{n}}{\le} M(t_2 - t_1) = M|t_1 - t_2|$$

<u>3η Περίπτωση:</u>

Έστω $t_1, t_2 \in \left[t_0 + \frac{\tau}{n}, t_0+\tau\right]$ τότε $|u_n(t_1) - u_n(t_2)| =$

$$= \left|x_0 + \int_{t_0}^{t_1+\frac{\tau}{n}} F(s, u_n(s))\, ds - x_0 - \int_{t_0}^{t_2-\tau/n} F(s, u_n(s))\, ds\right| =$$

$$= \left|\int_{t_2-\tau/n}^{t_1-\tau/n} |F(s, u_n(s))|\, ds\right| \le M \cdot \left|t_1 - \frac{\tau}{n} - t_2 + \frac{\tau}{n}\right| = M \cdot |t_1 - t_2|$$

<u>Άρα, έχουμε ότι:</u>

$$|u_n(t_1) - u_n(t_2)| \le M \cdot |t_1 - t_2|$$

Συνεπώς, εάν έχω επιλέξει $\delta = \varepsilon / M$ έχουμε:

$|t_1 - t_2| < \delta$ τότε: $|u_n(t_1) - u_n(t_2)| \le M \cdot \delta = \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Δηλαδή $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ισοσυνεχής. //

<u>Δηλαδή (συμπερασματικά):</u>

(u_n) ισοσυνεχής, φραγμένη ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Επομένως από το θεώρημα Arzelà - Ascoli έχουμε ότι $\exists$ υπακολουθία της (u_{k_n}) η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα προς κάποια συνάρτηση

$\tilde{u}$ στο $[t_0, t_0+\tau]$

NO.

Date

Θ.Σ.Ο. η $\tilde{u}$ ικανοποιεί το Π.Α.Τ

Έστω τώρα $t \in (t_0, t_0+\tau]$. Επιλέγουμε n_0 τέτοιο ώστε

$$t_0 + \frac{\tau}{k_{n_0}} < t$$

$t_0 \quad t \quad t_0+\tau$

(∃ τέτοιο διότι $\tau/k_{n_0} \to 0$)

οπότε για $n \geq n_0$ έχουμε τα εξής:

$$u_{k_n}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t-\tau/k_n} F(s, u_{k_n}(s))ds =$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, u_{k_n}(s))\,ds + \int_{t}^{t-\tau/k_n} F(s, u_{k_n}(s))ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,u_{k_n}(s))ds - \int_{t-k_n}^{t} F(s,u_{k_n}(s))ds \quad (**)$$

αλλά: $\left| \int_{t-\tau/k_n}^{t} F(s, u_{k_n}(s))\,ds \right| \leq M \cdot \left| t - \left(t - \frac{\tau}{k_n}\right)\right| = M \cdot \frac{\tau}{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Οπότε:

από την (**) παίρνοντας όρια έχουμε: (λόγω του ότι $u_{k_n} \to \tilde{u}$ ομοιόμορφα στο $[t_0, t_0+\tau]$ και επιπλέον F συνεχής)

$$\tilde{u}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \tilde{u}(s))\,ds \text{, δηλαδή } \tilde{u}\text{: λύση.}$$

Συμπερασματικά έχουμε:

ΘΕΩΡΗΜΑ: Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $F: D \to \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ ανοικτό, $(t,x) \mapsto F(t,x)$ και $(t_0, x_0) \in D$:

(a) Εάν η συνάρτηση F είναι συνεχής τότε το Π.Α.Τ

$$u'(t) = F(t, u(t))$$
$$u(t_0) = x_0$$

έχει τουλάχιστον μια τοπική λύση

(β) Εάν η συνάρτηση F έχει επιπλέον και συνεχείς μερικές παραγώγους ως προς x $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}(t,x)\right)$ συνεχείς $\forall (t,x)\in D$ τότε το Π.Α.Τ έχει ακριβώς μια τοπική λύση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

(α) Επειδή το D είναι ανοικτό του $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ και $(t_0,x_0)\in D$ έπεται ότι $\exists\ a,b$ τέτοια ώστε

$$K_{ab}(t_0,x_0)=\{(t,x): |t-t_0|\le a,\ |x-x_0|\le b\}\subseteq D$$

και επειδή η f είναι συνεχής στο D είναι συνεχής και στο συμπαγές $K_{a,b}(t_0,x_0)$. Επομένως από το θεώρημα Peano το Π.Α.Τ έχει τουλάχιστον μια τοπική λύση ορισμένη για t με $|t-t_0|\le \tau=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}$.

(β) Επειδή $K_{ab}(t_0,x_0)$ είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Επιπλέον επειδή οι μερικές παράγωγοι ως προς x είναι συνεχείς η F πληροί τη συνθήκη Lipschitz στο $K_{ab}(t_0,x_0)$ άρα η τοπική λύση είναι μοναδική.

$\left\{\begin{array}{l}\text{αν μια συνάρτηση είναι Lipschitz}\\ \text{δεν μπορεί να έχει 2η λύση}\end{array}\right\}$

"Επέκταση Λύσεων"

"Θεωρούμε $F: W\to\mathbb{R}^n$, $(t,x)\mapsto F(t,x)$ όπου W ανοικτό του $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ και F συνεχής και πληροί τη συνθήκη Lipschitz (ως προς τη μεταβλητή x ομοιόμορφα ως προς t)

Είδαμε ότι εάν u_1 και u_2 είναι 2 λύσεις της $u'(t)=F(t,u(t))$ (E) και $u(t_0)=x_0$ σε ένα διάστημα I τότε επειδή $u_1(t_0)=u_2(t_0)$ οι 2 λύσεις θα ταυτίζονται σε ολόκληρο το διάστημα I.

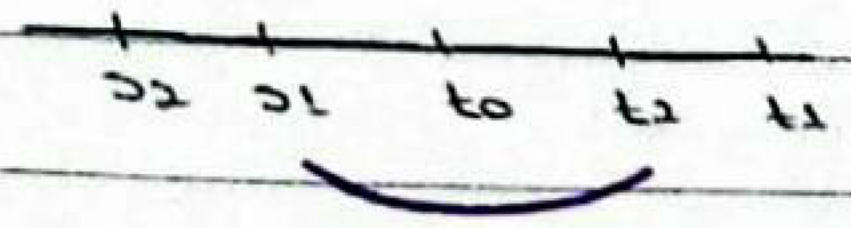
Έστω $u(t)$ και $\hat{u}(t)$ 2 λύσεις του Π.Α.Τ ορισμένες στα διαστήματα I_1 και I_2 αντίστοιχα ($t_0\in I_1$ και I_2). Θα λέμε ότι η $\hat{u}$ είναι μια επέκταση της u αν και μόνο αν το I_1) είναι γνήσιο υποσύνολο του I_2

NO

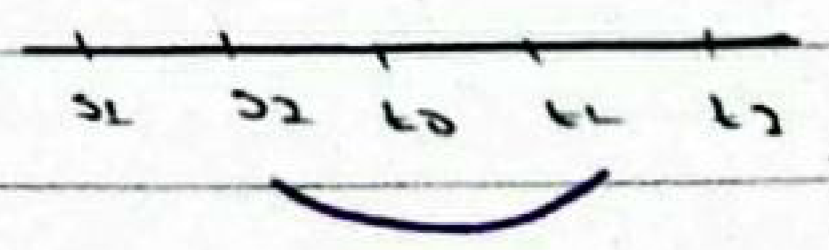
Date

και $u(t) = \hat{u}(t)$ $\forall t \in I_1$ //

▶ Έστω τώρα $u(t)$ και $v(t)$ λύσεις του Π.Α.Τ : (E) ορισμένες στα διαστήματα $[s_1, t_1]$ και $[s_2, t_2]$ αντίστοιχα όπου $s_1 < t_0 < t_1$ και $s_2 < t_0 < t_2$ τότε στο κοινό διάστημα που ορίζονται οι 2 λύσεις θα ταυτίζονται (δηλαδή $u(t) = v(t)$ $\forall t$ στο κοινό διάστημα.



ή



Θεωρούμε μια συνάρτηση w η οποία να ορίζεται στο διάστημα $[\min\{s_1, s_2\}, \max\{t_1, t_2\}]$ και είναι ίση ή με την $u(t)$ ή με την $v(t)$ στα διαστήματα στα οποία που αυτές ορίζονται και η $w(t)$ είναι λύση του Π.Α.Τ διότι κάθε μια από τις u και v ικανοποιεί τη Δ.Ε και την αρχική συνθήκη. Επιπλέον η w είναι μια επέκταση για κάθε μια από τις u και v.

▶ Μια λύση του Π.Α.Τ ορισμένη σε ένα διάστημα I θα λέμε ότι είναι μη επεκτάσιμη εάν και μόνο εάν $\nexists$ επέκταση αυτής.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:</u> Αν u είναι μια λύση του Π.Α.Τ ορισμένη σε ένα διάστημα I. Αν το I δεν είναι ανοικτό τότε $\exists$ μια επέκταση της u σε ένα ανοικτό διάστημα.

Πράγματι, εάν υποθέσουμε ότι το διάστημα I δεν είναι ανοικτό δεξιά και έχει δεξί άκρο b. τότε $\exists r > 0$ τέτοιο ώστε η Δ.Ε $u'(t) = F(t, u(t))$ να έχει μια λύση $\tilde{u}$ ορισμένη στο $[b-r, b+r]$ η οποία να πληροί την αρχική συνθήκη $\tilde{u}(b) = u(b)$, τότε η
$$u^*(t) = \begin{cases} u(t), & t \in I \\ \tilde{u}(t), & t \in (b, b+r) \end{cases}$$
είναι μια επέκταση της u και το διάστημα ορισμού της είναι $I \cup (b, b+r)$

▶ Εάν το αριστερό άκρο δεν ήταν ανοικτό τότε εργαζόμαστε παρόμοια.

NO.

Date

Έστω a το αριστερό άκρο, τότε $\exists\ \delta>0$ τέτοιο ώστε η Δ.Ε.
$u'(t)=F(t,u(t))$ να έχει μια λύση $\tilde{u}$ στο $[a-\delta, a+\delta]$ η οποία να ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\tilde{u}(a)=u(a)$.

τότε:

$$u^*(t)=\begin{cases}\tilde{u}(t), & t\in(a-\delta,a)\\ u(t), & t\in I.\end{cases}$$

είναι μια επέκταση της u

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΑ:

- Στα θεωρήματα ύπαρξης τοπικής λύσης γίνεται μια συντηρητική επιλογή του μήκους του διαστήματος ύπαρξης.

(π.χ) $[t_0-\tau, t_0+\tau]$

όπου

$$\tau<\min\left\{a, \frac{b}{LB+M}\right\}, \quad M=\max_{t\in[t_0-a,\,t_0+a]}|F(t,x_0)|$$

, L: σταθερά Lipschitz.

(για το θεώρημα Picard)

ή

$$\tau=\min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} \quad \text{όπου} \quad M=\sup_{(t,x)\in K_{ab}(t_0,x_0)}|F(t,x)|$$

(για το θεώρημα Peano)

Στις περισσότερες περιπτώσεις όμως το διάστημα ύπαρξης είναι μεγαλύτερο. Μπορεί δηλαδή να υπάρχει επέκταση αλλά γενικά όμως όχι για κάθε $t\in\mathbb{R}$.

(π.χ) Έστω η Δ.Ε $u'(t)=1+u^2(t)$ με $u(0)=0=x_0$. Τότε
$F(t,x)=1+x^2$

Η F είναι συνεχής στο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Συνεπώς, εάν $K_{ab}(t_0,x_0)=[-a,a]\times[-b,b]$.

Έχουμε:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$$ η οποία είναι συνεχής στο $K_{ab}(t_0,x_0)$.

Συνεπώς η F πληροί τη συνθήκη Lipschitz αφού αν (t,x) και $(t,y) \in K_{ab}(t_0,x_0)$

$$|F(t,x) - F(t,y)| = |1+x^2 - (1+y^2)| = |x^2-y^2| = |x-y||x+y| \leq 2b|x-y|$$

Άρα $\boxed{L=2b}$

Επίσης, το μέγιστο: $M = \max_{t\in[-\tau,\tau]} |F(t,x_0)| = \max_{t\in[-\tau,\tau]} |F(t,0)| = \max_{t\in[-\tau,\tau]} |1+0| = 1$

Άρα:

$$\tau \leq \min\left\{a, \frac{b}{Lb+M}\right\} = \min\left\{a, \frac{b}{2b\cdot b+1}\right\} = \min\left\{a, \frac{b}{2b^2+1}\right\}$$

Όμως $\forall b \in \mathbb{R}$: $b < 2b^2+1$ (διότι $2b^2-b+1>0$ $\forall b \in \mathbb{R}$)

άρα $\frac{b}{2b^2+1} < 1$.

Άρα: σύμφωνα με το θεώρημα Picard

η λύση θα ορίζεται σε ένα υποδιάστημα του $(-1,1)$.

Αλλά επιλύοντας τη Δ.Ε έχουμε:

$$u' = 1+u^2, \quad u(0)=0.$$

$$\int \frac{u'(t)}{1+u^2(t)}\,dt = \int 1\,dt$$

$\operatorname{Arctan} u(t) = t$

Άρα: $u(t) = \tan t$ και η $\tan t$ ορίζεται για $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

αναζητώ το μέγιστο διάστημα της λύσης που να ανήκει το $t_0=0$ στο $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \not\ni 0$

NO *

Date

(π.χ)

Έστω η Δ.Ε $u'(t) = u^2(t)$

$u(0) = 1 = x_0$

Εδώ η $f(t,x) = x^2$ συνεχής στο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Έχουμε $\frac{df}{dx} = 2x$.

η οποία είναι συνεχής οπότε:

εάν $K_{ab}(t_0,x_0) = \{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : |t|\le a,\ |x-1|\le b\}$.

τότε:

Η f είναι συνεχής στο $K_{ab}(t_0,x_0)$

$M = \max_{t\in[-a,a]} |F(t,x_0)| = \max_{t\in[-a,a]} |F(t,1)| = 1$

Επίσης, η F είναι Lipschitz με σταθερά Lipschitz $L=2b$.

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα Picard το διάστημα ορισμού της λύσης είναι υποσύνολο του $[-1,1]$

Όμως λύνουμε τη Δ.Ε $u'(t)=u^2(t)$, $u(0)=1$

$$\int \frac{u'(t)}{u^2(t)}\,dt = \int 1\,dt \Rightarrow \int \left(-\frac{1}{u(t)}\right)' dt = t+c$$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{1}{c-t}$$

Επίσης $u(0)=1 \Rightarrow c=1 \Rightarrow u(t) = \frac{1}{1-t}$

Ορίζεται σε διάστημα με ανοικτό άνω άκρο 1 διότι $\lim_{t\to 1} u(t) = +\infty$

Η λύση μπορεί να οριστεί στο $(-\infty,1)$.

Αυτό είναι το μέγιστο διάστημα ύπαρξης

(*) το $(1,+\infty)$ δεν είναι διότι το $0 \notin$ στο $(1,+\infty)$

NO.

Date

Συμπερασματικά:

Μπορεί η f να ορίζεται και να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ και η λύση που γίνεται μη φραγμένη για κάποια τιμή $t=c$. Δηλαδή η λύση θα ορίζεται μόνο σε κάποιο διάστημα (a,c)

ΠΡΟΤΑΣΗ:

Υποθέτουμε ότι $u=u(t)$ είναι μια λύση του Π.Α.Τ ορισμένη σε ένα διάστημα $[t_0,t_1]$ τότε η λύση μπορεί να επεκταθεί στα δεξιά αν και μόνο αν το σύνολο $\Gamma = \{(t,u(t)), t\in[t_0,t_1]\}$ ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες.

(i) Το Γ είναι φραγμένο

(ii) Η απόσταση του Γ από το σύνορο του Ω (στο οποίο είναι ορισμένη η f) είναι θετική.